**Семестровое задание по математической логике**

Тема: Логика высказываний.

Срок:

Номер варианта в каждой задаче определяется по вашему номеру в списке группы по таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Баллы | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **2** | **4** | **6** | **8** | **8** | **8** | **8** | **8** | **10** | **10** | **14** | **14** |

Варианты задач

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Задача | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| 21 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 21 | 19 | 5 | 8 | 3 | 3 |
| 22 | 14 | 17 | 20 | 3 | 6 | 9 | 22 | 2 | 17 | 1 | 7 | 8 |
| 23 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 2 | 23 | 16 | 7 | 14 | 4 | 11 |
| 24 | 20 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 24 | 6 | 9 | 7 | 8 | 13 |
| 25 | 3 | 10 | 5 | 18 | 19 | 9 | 25 | 7 | 5 | 3 | 8 | 8 |
| 26 | 17 | 20 | 5 | 4 | 3 | 15 | 26 | 17 | 20 | 16 | 9 | 6 |
| 27 | 4 | 4 | 7 | 7 | 9 | 9 | 27 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 28 | 8 | 8 | 5 | 19 | 19 | 16 | 1 | 16 | 14 | 14 | 13 | 1 |
| 29 | 10 | 10 | 11 | 11 | 17 | 14 | 2 | 13 | 12 | 4 | 3 | 2 |
| 30 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 | 3 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |

[1. Алгебра (логика) высказываний 3](#_Toc464455464)

[1.1. Формализация языка рассуждений 3](#_Toc464455465)

[1.2. Формулы алгебры высказываний 6](#_Toc464455466)

[1.3. Равносильность формул 9](#_Toc464455467)

[1.4. Нормальные формы формул алгебры высказываний 13](#_Toc464455468)

[1.5. Тавтологии алгебры высказываний 17](#_Toc464455469)

[1.6. Логический вывод 21](#_Toc464455470)

[1.7. Применение нормальных форм 24](#_Toc464455471)

[1.8. Структура математических теорем 26](#_Toc464455472)

[1.9. Логический вывод теорем 27](#_Toc464455473)

[1.9.1. Прямой вывод 29](#_Toc464455474)

[1.9.2. Доказательство «от противного» 29](#_Toc464455475)

[1.9.3. Приведение к абсурду 30](#_Toc464455476)

[1.9.4. Цепное заключение 30](#_Toc464455477)

[1.9.5. Метод резолюций 31](#_Toc464455478)

Задания

[**Задание 1)** Понятие высказывания 4](#_Toc464455452)

[**Задание 2)** Свойства пропозициональных связок 4](#_Toc464455453)

[**Задание 3)** Формулы алгебры высказываний 7](#_Toc464455454)

[**Задание 4)** Формулы алгебры высказываний 8](#_Toc464455455)

[**Задание 5)** Равносильные преобразования формул 11](#_Toc464455456)

[**Задание 6)** Равносильные преобразования формул 12](#_Toc464455457)

[**Задание 7)** Построение СДНФ и СКНФ 15](#_Toc464455458)

[**Задание 8)** Равносильные преобразования СДНФ и СКНФ 16](#_Toc464455459)

[**Задание 9)** Тавтологии 19](#_Toc464455460)

[**Задание 10)** Логическоеследование 21](#_Toc464455461)

[**Задание 11)** Логическое следование и применение нормальных форм 24](#_Toc464455462)

[**Задание 12)** Метод резолюций 33](#_Toc464455463)

1. Алгебра (логика) высказываний
   1. Формализация языка рассуждений

Объектамилогики высказываний являются «высказывания».

1. *Высказыванием* называется любое повествовательное предложение, которое может быть признано истинным или ложным, но не то и другое одновременно. Логическим значением высказывания являются “истина” или “ложь”.

Например, повествовательное предложение "Число З - простое" является истинным высказыванием, а “π- рациональное число" – ложным, но тоже высказыванием. Не всякое предложение является высказыванием. Например, «летайте самолетами Аэрофлота» - не высказывание, потому что оно ничего не утверждает. С помощью грамматических связок (операций с высказываниями) “не”, “и”, “или”, “если…, то…”, “… тогда и только тогда, когда…” и т.п. из высказываний можно получить новые, более *сложные высказывания*. Важно, что полученные таким образом высказывания тоже являются объектами логики высказываний.

При формальном исследовании сложных текстов высказывания обозначают строчными буквами латинского алфавита, возможно с индексами: A*, B, C1*,…, которые называются *пропозициональными переменными*. Истинность или ложность высказывания будем отмечать символами “1” – истина или “0” – ложь, например, *A*=1 – высказывание *A* истинно; *B*=0 – высказывание *B* ложно.

Операции с высказываниями вводятся с помощью грамматических связок, которые называют *логическими*(или*пропозициональными*)*связками:*

1. *отрицание*: ¬*A*(читается «не *A*», «неверно, что *A*»;
2. *конъюнкция: A*&*B*(читается «*A*и *B*»);
3. *дизъюнкция: A*∨*B*(читается «*A*или *B*»);
4. *импликация: A*→*B*(читается «если *A,*то *B*», «из *A* следует *B*», «*A* достаточно для *B*», «*B* необходимо для *A*»);
5. *эквивалентность: A*↔*B*(читается «*A* эквивалентно *B*», «*A* равносильно *B*», «*A* тогда и только тогда, когда *B*», «*A* необходимо и достаточно для *B*».

Логические значения результатов этих операций даются *таблицей истинности*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *A* | ¬*A* |  | *A* | *B* | *A*&*B* | *A*∨*B* | *A*→*B* | *A*↔*B* |
| 0 | 1 |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 |  | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
|  |  |  | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
|  |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

1. Понятие высказывания

Сформулируйте отрицания следующих высказываний; укажите значения истинности данных высказывания и их отрицаний:

1) Волга впадает в Каспийское море;

2) Число 28 не делится на число 7;

3) ;

4)

5) Все простые числа нечетны;

6) - рациональное число;

7) 5+3=10;

8) Великобритания – остров;

9) Все слова можно разделить на слоги;

10) Некоторые грибы несъедобны.

Установите, какие высказывания в следующих парах являются отрицаниями друг друга, и какие нет (объясните почему):

11) «», «»;

12) «», «»;

13) «Треугольник *ABC*прямоугольный», «Треугольник *ABC*тупоугольный»;

14) «Натуральное число *n* четно», «Натуральное число *n* не­четно»;

15) «Функция *f* нечетна», «Функция *f* четна»;

16) «Все простые числа нечетны», «Все простые числа четны»;

17) «Все простые числа нечетны», «Существует простое четное число»;

18) «Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле», «На Земле существует вид животных, неизвестный человеку »;

19) «Существуют иррациональные числа», «Все числа - ра­циональные»;

20) «Если *n*делится на 3, то *n*делится на 9», «Если *n*не де­лится на 3, то *n*не делится на 9».

1. Свойства пропозициональных связок

Определите логическое значение последнего высказыва­ния, исходя из логических значений всех предыдущих высказы­ваний:

1) *A*→*B* = 1, *A*↔*B* = 1, *B*→*A* = ?;

2) *A*→*B* = 1, (¬*A*&*B*)→ (¬*A*∨*B*) = ?;

3) *A*↔*B* = 0, ¬*B*→*A* = ?;

4) *A*&*B* = 0, *A*→*B* = 1, *B*→¬*A* = ?;

5) *A*↔*B* = 0, *A*→*B* = 1, (¬*A*→*B*)↔*A* = ?;

6) *A*∨*B* = 1, *A*→*B* = 1, ¬*B*→*A* = ?;

7) *A*&*B* = 0, *A*↔*B* = 0, *A*→*B* = 1, *A* = ?;

8) *A*&*B* = 0, *A*↔*B* = 0, *A*→*B* = 1, *B* = ?;

9) *A*&*B* = 0, *A*∨*B*=1, *A*→*B* = 1, *B*→*A* = ?;

10) *A*→(*B*↔*A*) = 0, *A*→*B* = ?.

Определите, достаточно ли приведенных сведений, чтобы установить его логическое значение (если достаточно, то укажите это значение; если недостаточно, то покажите на примерах, что возможны и одно и другое истинностные значения):

11) *B*→*C* = 0, *A*&(*B*→*C*) = ?,

12) *B* = 0, *A*∨(*B*→*C*) = ?;

13) *A* = 1, ¬(*A*∨*B*)↔ (¬*B*&¬*A*) = ?;

14) *B* = 1, (*A*→*B*)→ (¬*A*→¬*B*) = ?;

15) *A* = 0; (*A*&*B*)→ (*A*∨*C*) = ?;

16) *A* = 1, ¬(*B*→*A*)↔¬(*A*∨*C*) = ?;

17) *A* = 0, (*A*↔*B*)∨ (*A*&*C*) = ?;

18) *A*→*B* = 0, (¬(*A*→*B*)→¬(*A*&¬*B*))∨*C* = ?;

19) *A*∨*B* = 0, (*A*&¬*C*)↔ ((¬*A*∨¬*C*)→ (*B*&*D*)) = ?;

20) *B* = 1, *A*→(*B*↔*C*) = ?.

1. (*A*∨*B*) →*A* = 1, *A*→*B* = 1, ¬*A*↔¬*B* = ?.

Из первого условия (*A*∨*B*) →*A* = 1 заключаем, что невозможна ситуация, когда*A*∨*B* = 1, а*A* = 0, (т.е. *A* = 0 и при этом*B* = 1). Второе условие *A*→*B* = 1 исключает ситуацию, при которой *A* = 1 и*B* = 0. Следовательно, высказывания *A*и*B*имеют одинаковые значения истинности. Значит, одинаковые значения истинности имеют и их отрицания ¬*A*и ¬*B*. А раз так, то высказывание ¬*A*↔¬*B*будет истинным.

1. *A*↔*B* = 1, (*A*→*B*)&(¬*A*→¬*B*) = ?.

Из условия *A*↔*B* = 1 следует, что *A*и *B*имеют одинаковые значения истинности. Тогда одинаковые значения истинно­сти имеют и их отрицания¬*A*и ¬*B*. Значит, обе импликации *A*→*B*и ¬*A*→¬*B*истинны. Следовательно, истинна и конъюнк­ция двух последних высказываний.

1. *C* = 0, (*A*→(*B*∨¬*C*))↔*C* = ?.

Поскольку*C* = 0, то ¬*C* = 1 и, следовательно, *B*∨¬*C*=1, независимо от значения*B*. Далее, имеем *A*→(*B*∨¬*C*) = 1, независимо от значения*A*. Наконец находим (*A*→(*B*∨¬*C*))↔*C* = 1↔ 0 = 0.Таким образом, если *C* - ложное высказывание, то и все данное высказывание также будет ложным, т.е. приведенных сведений достаточно для того, чтобы определить логическое значение данного составного высказывания.

1. *A*&*B* = 1, (*A*&*B*) → ((¬*A*↔*C*)&(*B*∨*C*)) = ?.

Поскольку*A*&*B* = 1, то *A* = 1 и*B* = 1 Тогда*B*∨*C =* 1, независимо от значения*C*. С другой стороны, относительно значения *A*в ¬*A*↔*C*мы не можем высказаться определенно. Оно может оказаться как истин­ным (при *C*=0), так и ложным(при*C*=1). В первом случае след­ствие данного составного высказывания окажется истинным, а во втором – ложным. Следовательно, в первом случае, т.е. при*C*=0, данное в задаче высказывание истинно, а во втором, т.е. при*C*=1, - ложно. Таким образом, приведенных сведений не достаточно для того, чтобы установить логическое значение данного высказывания.

* 1. Формулы алгебры высказываний

1. Понятие *формулы алгебры высказываний* вводится следующим образом:

а) всякая пропозициональная переменная есть формула;

б) если *F*1 и *F*2 – формулы, то выражения *F*1, (*F*1&*F*2), (*F*1∨*F*2), (*F*1→*F*2), (*F*1↔*F*2) также являются формулами;

в) других формул, кроме формул, построенных по правилам а) и б), нет.

Скобки в формулах можно опускать, учитывая приоритет операций (указаны по убыванию): “¬”, “&”, “∨”, “→”,“↔”.

Таким образом, с учетом приоритетов операций, записи (((¬*F*1)&*F*2)→(*F*1∨*F*2))↔(*F*2→*F*1) и ¬*F*1&*F*2→*F*1∨*F*2↔*F*2→*F*1эквивалентны.

Формула логики высказываний сама по себе не имеет никакого содержания. В частности, она не является ни истинной, ни ложной. Формула *F*(*X*1,*X*2,…,*X*n), содержащая пропозициональные переменные *X*1, *X*2,…, *X*n, превращается в высказывание, истинное или ложное, при всякой подстановке вместо всех ее пропозициональных переменных любых конкретных высказываний A1, A2, …, An. Логическое значение высказывания *F*(A1,A2,…,An)получается формально, подстановкой логических значений высказываний A1, A2, …, An (0 или 1) в формулу и выполнением заданных формулой операций. Такой процесс подстановки называется *интерпретацией* данной формулы алгебры высказываний.

Для формулы от *n*переменных имеется 2*n*неэквивалентных интерпретаций.

1. Формула *F*(*X*1,*X*2,…,*X*n) называется *выполнимой*, если существует такой набор высказываний A1, A2, …, An , который обращает эту формулу в *истинное* высказывание *F*(A1,A2,…,An).
2. Формула *F*(*X*1,*X*2,…,*X*n) называется *опровержимой*, если существует такой набор высказываний A1, A2, …, An , который обращает эту формулу в*ложное* высказывание *F*(A1,A2,…,An).
3. Формула *F*(*X*1,*X*2,…,*X*n) называется *тождественно истинной* или *тавтологией*, если она обращается в *истинное* высказывание при всех наборах значений переменных, т.е. при любой интерпретации.
4. Формула *F*(*X*1,*X*2,…,*X*n) называется *тождественно ложной*или *противоречием*, если она обращается в *ложное* высказывание при всех наборах значений переменных, т.е. при любой интерпретации.

Любая формула алгебры высказываний, помимо аналитического выражения (формулы), может быть однозначно задана таблицей истинности.

1. *Таблица истинности* или таблица значений формулы логики высказываний — это таблица, которая указывает логическое значение формулы при любой ее интерпретации, т.е. для всех возможных наборов значений входящих в нее переменных.
2. Формулы алгебры высказываний

Составьте таблицы истинности для следующих формул и укажите, какие из формул являются *выполнимыми*, какие - *опровержимыми*, какие – тождественно истинными (*тавтологиями*), какие – тождественно ложными (*противоречиями*):

1) (*P*→*Q*) → ((*P*→¬*Q*) →¬*P*);

2) ((*P*→*Q*) →*P*) →*Q*;

3) (*P*&(*Q*∨¬*P*))&((¬*Q*→*P*)∨*Q*);

4) ((*P*&¬*Q*) →*Q*) → (*P*→*Q*);

5) *P*&(*Q*&(¬*P*∨¬*Q*);

6) (((*P*→*Q*)→*Q*)→*Q*)→*Q*;

7) ((((*P*∨¬*Q*)&(*Q*∨*R*)) ∨¬*R*) ∨*Q*;

8) (*P*&(*Q*∨*R*)) → ((*R*→(*P*→*Q*)) ↔ (*Q*→(*R*→*P*)));

9) (((*P*↔*Q*) ↔ (*P*↔*R*)) ↔ (*Q*↔*R*)) ↔*P*;

10) ¬((¬*R*→¬(*P*→¬(*Q*→*R*))) →¬(*P*→*Q*));

11) (*P*↔*Q*) → ((P→¬*Q*) ↔¬*P*);

12) ((*P*∨*Q*)→*P*)→*Q*;

13) (*P*&(¬*Q*∨*P*))&((¬*Q*→*P*)→*Q*);

14) (*P*&(¬*Q*∨*P*)) ∨ ((¬*Q*→*P*) →*Q*);

15) *P*∨ (*Q*&(¬*P*∨¬*Q*);

16) (((*P*→*Q*)→*Q*)→*P*)→*P*;

17) (((*P*∨¬*Q*)&(¬*Q*∨*R*))∨¬*R*)&*Q*;

18) (*P*&(*Q*∨*R*))↔ ((R→ (*P*→*Q*))↔ (*Q*→ (*P*→*R*)));

19) (((*P*→*Q*)→ (*R*↔*P*))↔ (*Q*↔*R*))→*P*;

20) ¬((*R*→¬(*P*→¬(*Q*→*R*))) → (*P*→¬*Q*));

1. Таблица истинности формулы ((*P*∨¬*Q*)→*Q*) & (¬*P*∨*Q*) строится для всех возможных комбинаций, входящих в нее пропозициональных переменныхP и Q:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | ¬*Q* | *P*∨¬*Q* | (*P*∨¬*Q*)→*Q* | ¬*P* | ¬*P*∨*Q* | ((*P*∨¬*Q*)&(¬*P*∨*Q*) |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Так как значения формулы (последний столбец) могут принимать значения 0 или 1, то, по определению, эта формула является одновременно и выполнимой и опровержимой.

1. Формулы алгебры высказываний

Докажите, что следующие формулы выполнимы, не составляя для них таблиц истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в них пропорциональных переменных, при которых эти формулы превращаются в истинные высказывания:

1) ¬ (*P*→¬*P*);

2) (*P*→*Q*)→ (*Q*→*P*);

3) (*Q*→(*P*&*R*))&¬((*P*∨*R*)→*Q*);

4) ¬((*P*→¬*Q*)∨*R*)&*Q*;

5) (((*P*→*Q*)→ (*R*→*Q*))→ (*R*→*P*))→ (*P*→*Q*);

6) ((*Q*→¬*P*)→*P*)→ (*P*→ (¬*P*→*Q*));

7) (*P*→ ((*Q*→*R*)→*R*))→ ((*P*→ (*Q*→*R*))→ (*P*→*R*));

8) ((*P*→*Q*)&(*Q*→*R*))→ (¬*R*→¬*P*);

9) ((*P*↔*Q*)&(*Q*↔*R*))→ (*P*∨*R*);

10) ((*P*&¬*Q*)∨(¬*P*∨*Q*)) ↔ (*P*↔*Q*).

Докажите, что следующие формулы опровержимы, не составляя для них таблиц истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в них пропорциональных переменных, при которых эти формулы обращаются в ложные высказывания:

11) ((*X*→(*Y*&*Z*)) → (¬*Y*→¬*X*) →¬*Y*;

12) ((*X*∨*Y*) ∨*Z*) → ((*X*∨*Y*)&(*X*∨*Z*));

13) (*X*∨*Y*)&((*Y*∨*Z*)&(*Z*∨*X*))) → ((*X*&*Y*)&*Z*);

14) (*X*&*Y*)∨ (*X*&*Z*)∨ (*Y*&*Z*)∨ (*U*&*V*)∨ (*U*&*W*)∨ (*V*&*W*)&(¬*X*&¬*U*);

15) ((¬*P*→*P*)→*P*)→¬((¬*Q*→¬*P*)→ ((¬*Q*→*P*)→*Q*));

16) (((*P*→*Q*)→ (*R*→*Q*))→ (*R*→*P*))→ (*P*→*Q*);

17) ((*Q*→¬*P*)→*P*)→ (*P*→ (*P*→¬*Q*));

18) (*P*→ ((*Q*→*R*)→*R*))→ ((*P*→ (*Q*→*R*))→ (*P*→¬*R*));

19) ((*P*→*Q*)&(*R*→¬*Q*)&(*P*∨*R*))→*R*;

20) ((*P*&¬*Q*)&(*Q*→*R*)&(*R*∨¬*S*))→ (*S*&*Q*).

1. Докажите, что следующая формула выполнима, не составляя для нее таблицу истинности (*P*&*Q*) → ((*R*∨*Q*) → (*Q*&¬*Q*)).

Заключение второй импликации есть, очевидно, тождественно ложная формула. Поэтому если посылка *R*∨*Q* второй импликации превратится при некоторой подстановке в ложное высказывание, то эта импликация станет истинным высказыванием и, следовательно, вся данная импликация превратится в истинное высказывание независимо от того, в какое высказывание превратится посылка *P*&*Q* всей данной импликации. Посылка *R*∨*Q* второй импликации обращается в ложное высказывание, когда вместо переменных *R*и *Q* подставляются ложные высказывания. Итак, данная формула выполнима, поскольку она обращается в истинное высказывание,когда вместо переменных *R*и *Q* подставляются ложные высказывания, *P*-любое.

1. Докажите, что следующая формулаопровержима, не составляя для нее таблицу истинности (*X*∨*Y*) → ((¬*X*&*Y*) ∨ (*X*&¬*Y*)).

Импликация ложна лишь в одном случае: когда ее посылка истинна, а следствие ложно. Следствием нашей импликации является дизъюнкция, которая ложна тогда и только тогда, когда оба ее слагаемых ложны. Итак, наша формула обратится в ложное высказывание, если найдутся такие высказывания*X*и *Y*, что высказывание*X*∨*Y*истинно, а оба высказывания ¬*X*&*Y*и *X*&¬*Y*одновременно ложны. Если *X* и *Y*имеют разные значения, одно из высказываний ¬*X*&*Y*и *X*&¬*Y*будет истинным, а другое – ложным, что нас не устраивает. Поэтому *X* и *Y*либо оба истинны, либо оба ложны. Но если *X* и *Y* оба ложны, то высказывание *X*∨*Y* ложно, что нас не устраивает. Следовательно, *X* и *Y*должны быть оба истинны. Итак, мы доказали, что данная формула превращается в ложное высказывание в одном и только одном случае, когда вместо переменных подставляются истинные высказывания.

* 1. Равносильность формул

1. Две формулы называются *равносильными*, если на всех одинаковых наборах переменных значения этих формул совпадают.

Обозначение равносильности формул *P* и *Q*: *P*≅*Q*   .

Отношение равносильности есть отношение *эквивалентности*так как оно симметрично (если *F*1≅*F*2, то *F*2≅*F*1), рефлексивно (*F*≅*F*) и транзитивно (если *F*1≅*F*2и *F*2≅*F*3, то *F*1≅*F*3).

Для того, чтобы установить равносильность формул, можно составить таблицы истинности для каждой формулы и сравнить их. Для равносильных формул эти таблицы совпадают. Другой способ установления равносильности формул заключается в использовании установленных равносильностей формул логики высказываний. Для произвольных формул A, B, C справедливы:

1. Основные равносильности:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1.1. *P*&*P*≅*P*  1.2. *P*∨*P*≅*P* | 1.3. *P*& 1 ≅*P*  1.4. *P*∨ 1 ≅ 1 | 1.5. *P*& 0 ≅ 0  1.6. *P*∨ 0 ≅*P* |

1.7. *P*& (¬*P*) ≅ 0 – закон противоречия

1.8. *P*∨ (¬*P*) ≅ 1 – закон исключенного третьего

1.9. ¬(¬*P*) ≅*P* – закон снятия двойного отрицания

1.10. *P*& (*Q*∨*P*) ≅*P* –первый закон поглощения

1.11. *P*∨ (*Q*&*P*) ≅*P* – второй закон поглощения

1.12. *P*≅ (*P*&*Q*) ∨ (*P*&¬*Q*) – первая формула расщепления

1.13. *P*≅ (*P*∨*Q*) & (*P*∨¬*Q*) – втораяформула расщепления

2. Равносильности, выражающиеоднилогическиеоперации через другие:

2.1. *P*↔*Q*≅ (*P*→*Q*)&(*Q*→*P*) ≅ (*P*&*Q*) ∨ (¬*P*&¬*Q*) ≅ (¬*P*∨*Q*)&(*P*∨¬*Q*) – основные формулы доказательства теорем существования

2.2. *P*→*Q*≅¬*P*∨*Q*≅¬(*P*&¬*Q*)

2.3. *P*∨*Q*≅¬*P*→*Q*≅¬ (¬*P*&¬*Q*)

2.4. *P*&*Q*≅¬(*P*→¬*Q*) ≅¬(¬*P*∨¬*Q*)

2.5. ¬(*P*&*Q*) ≅¬*P*∨¬*Q* –первый закон де Моргана

2.6. ¬(*P*∨*Q*) ≅¬*P*&¬*Q* – второй закон де Моргана

2.7. *P*&*Q*≅¬(¬*P*∨¬*Q*)

2.8. *P*∨*Q*≅¬(¬*P*&¬*Q*)

Из равносильностей этой группы формул следует, что всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание.

3. Равносильности, выражающие алгебраические законы:

3.1. *P*&*Q*≅*Q*&*P* – коммутативность конъюнкции

3.2. *P*∨*Q*≅*Q*∨*P* –коммутативность дизъюнкции

3.3. *P*& (*Q*&*R*) ≅ (*P*&*Q*) &*R* –ассоциативность конъюнкции

3.4. *P*∨ (*Q*∨*R*) ≅ (*P*∨*Q*) ∨*R* –ассоциативность дизъюнкции

3.5. *P*& (*Q*∨*R*) ≅ (*P*&*Q*) ∨ (*P*&*R*) – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

3.6. *P*∨ (*Q*&*R*) ≅ (*P*&*Q*) ∨ (*P*&*R*) – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

Следующие теоремы дают ряд правил, с помощью которых можно переходить от одних равносильностей к другим.

1. Пусть *P*≅*Q* и *R* – произвольная формула. Тогда¬*P*≅¬*Q*; *P*&*R*≅*Q*&*R*; *R*&*P*≅*R*&*Q*; *P*∨*R*≅*Q*∨*R*; *R*∨*P*≅*R*∨*Q*; *P*→*R*≅*Q*→*R*; *R*→*P*≅*R*→*Q*; *P*↔*R*≅*Q*↔*R*; *R*↔*P*≅*R*↔*Q*.
2. Пусть *P*≅*Q* и *R* –формула, в которой выделено одно вхождение переменной *X*i. Пусть *R*(*P*) получается из *R* заменой этого вхождения *X*i на *P*, а *R*(*Q*) – из *R* заменой этого же вхождения *X*i на *Q*. Тогда *R*(*P*) ≅*R*(*Q*).
3. Пусть *R*(*P*) – формула, содержащая P в качестве своей подформулы. Пусть *R*(*Q*) получается из *R*(*P*) заменой *P* в этом вхождении на *Q*. Тогда, если *P*≅*Q*, то *R*(*P*) ≅*R*(*Q*).

Обычно равносильные преобразования выполняют, чтобы упростить запись формулы, при этом удобно сначала удалить из формулы операции → и ↔ (равносильности 2.1-2.2), затем попытаться преобразовать формулу к более простому виду, используя алгебраические законы (3.1-3.6), законы де Моргана (2.5-2.6) и законы группы 1 (поглощение, исключенного третьего, противоречия).

1. Привести формулу (*P*↔*Q*) & (*P*∨*Q*) к возможно более простой форме.

Выполним эквивалентные преобразования: (*P*↔*Q*) & (*P*∨*Q*)≅ (*P*→*Q*) &(*Q*→*P*) &(*P*∨*Q*)≅ (¬*P*∨*Q*)&(*P*∨¬*Q*)&(*P*∨*Q*)≅(¬*P*∨*Q*)&((*P*∨¬*Q*)&(*P*∨*Q*)) ≅(¬*P*∨*Q*)&(*P*∨(¬*Q*&*Q*)) ≅(¬*P*∨*Q*)&(*P*∨0) ≅(¬*P*∨*Q*)&*P*≅(¬*P*&*P*)∨(*Q*&*P*)≅ 0 ∨(*Q*&*P*)≅ (*Q*&*P*).

1. Доказать, что формула ((*P*→¬*Q*) → ((¬*R*→¬*S*) → (*P*&*Q*))) &¬(*R*→*P*) тождественно ложна.

Выполнимравносильныепреобразования: ((*P*→¬*Q*) → ((¬*R*→¬*S*) → (*P*&*Q*))) &¬(*R*→*P*) ≅ (¬(¬*P*∨¬*Q*) ∨ (¬(*R*∨¬*S*) ∨ (*P*&*Q*))) &¬(¬*R*∨*P*) ≅ ((*P*&*Q*) ∨ (¬*R*&*S*) ∨ (*P*&*Q*)) & (*R*&¬*P*) ≅ ((*P*&*Q*) ∨ (¬*R*&*S*)) & (*R*&¬*P*) ≅ (*P*&*Q*&*R*&¬*P*) ∨ (¬*R*&*S*&*R*&¬*P*) ≅ (0&*Q*&*R*) ∨ (0&*S*&¬*P*) ≅0∨0≅ 0.

1. Упростить данную систему истинных высказываний, т.е. найти логически эквивалентную ей систему, состоящую из меньшего числа не более сложных высказываний: *A*→*B*, *R*→*B*, (*B*&*R*) →*A*.

Составим конъюнкцию данных высказываний. Конъюнкция высказываний истинна, когда истинно каждое из входящих в него высказываний. Приведя конъюнкцию равносильными преобразованиями к более простому виду, можно получить более простую систему высказываний, эквивалентную данной. Итак, (*A*→*B*) &(*R*→*B*) & ((*B*&*R*) →*A*) ≅(¬*A*∨*B*) &(¬*R*∨*B*) & (¬(*B*&*R*) ∨*A*) ≅(¬*A*∨*B*) &((*A*&¬*A*)∨*B*∨¬*R*) & (*A*∨¬*B*∨¬*R*) ≅(¬*A*∨*B*) &(*A*∨*B*∨¬*R*) &(¬*A*∨*B*∨¬*R*)& (*A*∨¬*B*∨¬*R*) ≅(¬*A*∨*B*) &(*A*∨*B*∨¬*R*) &(¬*A*∨*B*∨¬*R*)&(*A*∨*B*∨¬*R*) & (*A*∨¬*B*∨¬*R*)≅(¬*A*∨*B*) &((*A*&¬*A*)∨*B*∨¬*R*) &(*A*∨ (*B*&¬*B*)∨¬*R*) ≅(¬*A*∨*B*) &(*B*∨¬*R*) &(*A*∨¬*R*)≅(¬*A*∨*B*)&((*A*&*B*)∨¬*R*) ≅(*A*→*B*) &(*R*→(*A*&*B*)). Следовательно, эквивалентная система высказываний: *A*→*B*и*R*→(*A*&*B*).

1. Преобразовать формулу ((*X*→*Y*)& (*Y*→*Z*)) →(Z→*X*)равносильным образом так, чтобы она содержала только логические связки ¬ и ∨.

Удалим операцию “→”: ((*X*→*Y*)& (*Y*→*Z*)) →(*Z*→*X*)≅((¬*X*∨*Y*)& (¬*Y*∨*Z*)) →(¬*Z*∨*X*)≅¬((¬*X*∨*Y*)& (¬*Y*∨*Z*)) ∨(¬*Z*∨*X*).Применим законы де Моргана и двойного отрицания, чтобы удалить связку &, по возможности упростив выражение: ¬((¬*X*∨*Y*)& (¬*Y*∨*Z*)) ∨(¬*Z*∨*X*)≅¬ (¬*X*∨*Y*)∨¬ (¬*Y*∨*Z*)∨(¬*Z*∨*X*)≅ (*X*&¬*Y*)∨ (*Y*&¬*Z*)∨¬*Z*∨*X*≅(*X*∨(*X*&¬*Y*))∨ (¬*Z*∨(*Y*&¬*Z*))≅*X*∨¬*Z*.

1. Равносильные преобразования формул

Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только логические связки ¬ и &:

1. (*X*∨*Y*) → (¬*X*→*Z*);
2. (¬*X*→*Y*) ∨¬ (*X*→*Y*);
3. ((*X*∨*Y*∨*Z*) →*X*) ∨*Z*;
4. ((*X*→*Y*) →*Z*) →¬*X*;
5. (*X*∨ (*Y*→*Z*)) →*X*;

Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только логические связки ¬ и ∨:

1. (*X*→*Y*) → (*Y*&*Z*);
2. (¬*X*&¬*Y*) → (*X*&*Y*);
3. ((¬*X*&¬*Y*) ∨*Z*) → (*Z*&¬*Y*)
4. ((*X*→ (*Y*&*Z*)) → (¬*Y*→¬*X*)) →¬*Y*;
5. ((*X*→*Y*)& (*Y*→*Z*)) → (*X*→*Z*);

С помощью равносильных преобразований установите тождественную истинность или тождественную ложность формул:

1. (¬*X*→ (*Y*&¬*Y*)) →*X*;
2. ((*X*&¬*Y*) → (*Z*&¬*Z*)) → (*X*→*Y*);
3. ((*X*→*Y*) &¬*Y*) →¬*X*;
4. ((*X*→*Y*) ∨*Z*) ↔ (*X*→ (Y ∨*Z*);
5. *X*→ (*Y*→ ((*X*∨*Y*) → (*X*&*Q*)));
6. ((*X*→*Y*) →*X*) &¬*X*;
7. ¬ ((((*X*→*Y*) & (*Y*→*Z*)) → (*X*→*Z*));
8. (*X*∨*Y*) ↔ (¬*X*& (*Y*→¬*Y*));
9. (*X*→ (*Y*→*Z*)) & (*X*→*Y*) &*X*&¬*Z*;
10. ((*X*→¬*Y*) →¬(*X*→*Z*)) &¬(*Z*→*Y*).
11. Равносильные преобразования формул

Применяя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к возможно более простой форме.

1. ¬(¬*P*∨*Q*) → ((*P*∨*Q*) →*P*);
2. ¬((*P*→*Q*) &*P*) & (*P*∨*Q*);
3. ¬(¬*P*&¬*Q*) ∨ ((*P*→*Q*) &*P*);
4. (*P*→¬*Q*) & ((*P*→*Q*) ∨ (*R*→*P*));
5. ((*P*→*Q*) & (*Q*→*P*) & (*P*∨*Q*);
6. (*P*↔*Q*) → (¬*P* →*Q*);
7. (*P*→*Q*) & (*Q*→¬*P*) & (*R*→*P*);
8. ¬((*P*↔¬*Q*) ∨*R*) &*Q*;
9. ((*P*→*Q*) → ((*P*→¬Q) →¬*P*);
10. (*P*&*R*) ∨ (*P*&¬*R*) ∨ (*Q*&*R*) ∨ (¬*P*&*Q*&*R*);

Упростите данную систему истинных высказываний, т.е. найдите логически эквивалентную ей систему, состоящую из меньшего числа не более сложных высказываний:

1. *R*→ (*P*∨*Q*), (*Q*&*R*) →*P*, (*P*&*Q*) →*R*;
2. *P*&*Q*, *Q*→*R*, *R*→ (*P*∨*Q*);
3. *P*→ (*Q*∨*R*), *Q*→ (*P*∨*R*), (*P*&*Q*) →*R*;
4. *P*∨*R*, *Q*→*R*, (*Q*&*R*) →*P*;
5. *P*→*Q*, *P*→ (*Q* ∨*R*), *Q*→*R*;
6. *P*→*Q*, *Q*→¬*P*, *R*→*P*;
7. *P*→*Q*, *P*∨*Q*, *Q*→*P*;
8. *P*→ (*Q*∨*R*), *W*→ (*S*∨*T*), *R*→ (*Q*∨¬*P*), (*W*&*T*) →¬*S*;
9. ¬*P*→ (*Q*∨*R*), *Q*→¬(*P*&*R*), *R*→(*P*∨¬*Q*), P→(*Q*∨*R*), (*P*&*R*)→*Q*, (¬*P*&¬*Q*) →*R*;
10. *W*→ (*M*∨ S), *R*→*T*, ¬*Q*→*T*, *M*→ (*S*∨*W*), *P*→ (*T*∨*R*);
    1. Нормальные формы формул алгебры высказываний

Любая формула алгебры высказываний однозначно задается таблицей истинности. Однако соответствующих аналитических форм у формулы может быть сколь угодно много, так как с помощью равносильных преобразований можно получить сколь угодно много эквивалентных выражений одной и той же формулы. Среди всевозможных выражений данной формулы существуют две формы, *единственные* для данной формулы. Они называются: совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) и совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

Введем обозначение:

1. *Совершенным конъюнктом*  переменных *X*1,*X*2,…,*X*nназывается выражение:

, *σi*∈{0,1}, *i*=1, 2, … , *n*

1. *Совершенным дизъюнктом* переменных *X*1,*X*2,…,*X*nназывается выражение:

, *σi*∈{0,1}, *i*=1, 2, … , *n*

Обратите внимание, что в совершенный дизъюнкт (конъюнкт) от *n* переменныхвходят по одному разу все переменные или их отрицания.

1. Каждая не тождественно ложная формула алгебры высказываний от *n* аргументов имеет единственную (с точностью до перестановки дизъюнктивных членов) *совершенную дизъюнктивную нормальную форму* (СДНФ - дизъюнкция совершенных конъюнктов):

*F*(*X*1,*X*2,…,*X*n) ≅,

где дизъюнкция ведется по всем наборам (*α*1, *α*2, …, *α*n) переменных, для которых *F*(*α*1, *α*2, …, *α*n) = 1.

1. Каждая формула алгебры высказываний от *n* переменных, не являющаяся тавтологией, имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктивных членов) *совершенную конъюнктивную нормальную форму* (СКНФ - конъюнкция совершенных дизъюнктов):

*F*(*X*1,*X*2,…,*X*n) ≅,

где конъюнкция ведется по всем наборам (*α*1, *α*2, …, *α*n) переменных, для которых *F*(*α*1, *α*2, …, *α*n) = 0.

Способы приведения формулы алгебры высказываний к СДНФ и СКНФ проистекают из двух способов задания формулы алгебры высказываний:

* 1. по таблице истинности;
  2. по аналитической форме записи формулы.

1. Пусть, например, формула *F*(*X*,*Y*,*Z*) задана следующей таблицей своих значений:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | *Y* | *Z* | *F*(*X*,*Y*,*Z*) | Совершенный конъюнкт | Совершенный дизъюнкт |
| (*α*X) | (*α*Y) | (*α*Z) | *F*(*α*X,*α*Y,*α*Z) |
| 0 | 0 | 0 | 1 | ¬*X*&¬*Y*&¬*Z* |  |
| 0 | 0 | 1 | 0 |  | *X*∨*Y*∨¬*Z* |
| 0 | 1 | 0 | 1 | ¬*X*&*Y*&¬*Z* |  |
| 0 | 1 | 1 | 1 | ¬*X*&*Y*&*Z* |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 | *X*&¬*Y*&¬*Z* |  |
| 1 | 0 | 1 | 0 |  | ¬*X*∨*Y*∨¬*Z* |
| 1 | 1 | 0 | 0 |  | ¬*X*∨¬*Y*∨*Z* |
| 1 | 1 | 1 | 1 | *X*&*Y*&*Z* |  |

Запишем СДНФ:

*F*(*X*,*Y*,*Z*) ≅≅ (¬*X*&¬*Y*&¬*Z*)∨(¬*X*&*Y*&¬*Z*)∨ (¬*X*&*Y*&*Z*)∨(*X*&¬*Y*&¬*Z*)∨(*X*&*Y*&*Z*).

Запишем СКНФ:

*F*(*X*,*Y*,*Z*) ≅≅ (*X*∨*Y*∨¬*Z*) & (¬*X*∨*Y*∨¬*Z*) & (¬*X*∨¬*Y*∨*Z*).

Второй способ приведения формул алгебры высказываний к совершенным нормальным формам основан на равносильных преобразованиях данной формулы.

1. Приведение формулы к СДНФ и СКНФ
2. сначала избавиться от операций импликации и эквивалентности, выразив их через логические связки ¬, & и ∨ по законам:

*X*→*Y* ≅¬*X*∨*Y*, *X↔Y* ≅ (¬*X*∨*Y*)&(¬*Y*∨*X*);

1. довести знаки отрицания до независимых переменных, используя законы де Моргана:

¬(*X*∨*Y*) ≅¬*X*&¬*Y*, ¬(*X*&*Y*) ≅¬*X*∨¬*Y*;

1. применяя законы дистрибутивности

для СДНФ: (*X*∨*Y*)&*Z*≅ (*X*&*Z*)∨(*Y*&*Z*);

для СКНФ: (*X*&*Y*)∨*Z*≅ (*X*∨*Z*)&(*Y*∨*Z*);

преобразовать формулу к дизъюнкции (конъюнкции) дизъюнктивных (конъюнктивных) одночленов;

1. преобразовать дизъюнктивные (конъюнктивные) одночлены к совершенной форме: например, добавим переменную *Z*:

для СДНФ: (*X*&*Y*) ≅ (*X*&*Y*)&(*Z*∨¬*Z*) ≅ (*X*&*Y*&*Z*)∨(*X*&*Y*&¬*Z*);

для СКНФ: (*X*∨*Y*) ≅ (*X*∨*Y*)∨(*Z*&¬*Z*) ≅ (*X*∨*Y*∨*Z*)&(*X*∨*Y*∨¬*Z*);

1. постоянно избавляться от двойных отрицаний: ¬¬*X*≅*X*и от повторяющихся одночленов: *X*&*X*≅*X*, *X*∨*X*≅*X*.

Для формулы *F*(*X*1,*X*2,…,*X*n) обозначим: *F*СДНФ(*X*1,*X*2,…,*X*n) – ее СДНФ, через *F*СKНФ(*X*1,*X*2,…,*X*n) – ее СKНФ.

Рассмотрим, как преобразовать СДНФ к СКНФ.

Возьмем, например функцию:

*F*СДНФ(*X*1,*X*2,…,*X*n) = (¬*X*1&*X*2&*X*3)∨(*X*1&¬*X*2&*X*3)∨(*X*1&*X*2&*X*3).

Построим ее отрицание. Так как СДНФ строится по наборам переменных, в которых функция *F*(*X*1,*X*2,…*X*n)=1, то ее отрицание – дизъюнкция конъюнктивных одночленов, не входящих в *F*СДНФ. В нашем случае:

¬*F*(*X*1,*X*2,…,*X*n) = (¬*X*1&¬*X*2&¬*X*3) ∨ (¬*X*1&¬*X*2&*X*3) ∨ (¬*X*1&*X*2&¬*X*3) ∨ (*X*1&¬*X*2&¬*X*3) ∨ (*X*1&*X*2&¬*X*3).

Теперь возьмем отрицание этой функции:

¬¬*F*(*X*1,*X*2,…,*X*n) = *F*СКНФ(*X*1,*X*2,…,*X*n) = ¬((¬*X*1&¬*X*2&¬*X*3) ∨ (¬*X*1&¬*X*2&*X*3) ∨ (¬*X*1&*X*2&¬*X*3) ∨ (*X*1&¬*X*2&¬*X*3) ∨ (*X*1&*X*2&¬*X*3)) ≅  
≅ (*X*1∨*X*2∨*X*3) & (*X*1∨*X*2∨¬*X*3) & (*X*1∨¬*X*2∨*X*3) & (¬*X*1∨*X*2∨*X*3) & (¬*X*1∨¬*X*2∨*X*3).

Преобразование СКНФ к СДНФ выполняется аналогично

Совершенные нормальные формы позволяют дать *критерий равносильности двух произвольных формул P* и *Q*. В случае если *P* и *Q* содержат одни и те же переменные, их можно привести к СДНФ или к СКНФ. В силу единственности нормальных форм как конъюнктивные, так и дизъюнктивные НФ этих формул должны совпадать с точностью до перестановки одночленов.

1. Построение СДНФ и СКНФ

Записать СДНФ и СКНФ функции с помощью таблицы истинно­сти.Используя СДНФ или СКНФ, привести формулу к более простому виду с помощью равносильных преобразований.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | Вариант | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 0 | 0 | 0 |  |  |  |  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 |
| 0 | 0 | 1 |  |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |  | 1 |  |  | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 |  |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |
| 0 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 |  |  |  | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |  | 1 |  |

1. (вариант 27)

СДНФ (строится по наборам переменных, на которых значение функции равно 1): =() (;

СКНФ(строится по наборам переменных, на которых значение функции равно 0): = () () ().

1. Равносильные преобразования СДНФ и СКНФ
2. Привести равносильными преобразованиями формулу к СДНФ.
3. Привести равносильными преобразованиями формулу к СКНФ.
4. ПолучитьСДНФ из СКНФ (СКНФ из СДНФ).

1) (*X*↔*Y*)&¬(*Z*→*X*);

2) ((*X*→*Y*)→ (*Z*→¬*X*))→ (→*Y*¬*Z*);

3) (*X*→ (*Y*→*Z*))→ ((*X*→¬*Z*)→ (*X*→¬*Y*));

4) ((*X*→*Y*)∨¬*Z*)→ (*X*∨ (*X*↔*Z*));

5) (*X*→*Y*)→*Z*;

6) *X*→ (*Y*→*Z*);

7) (¬*X*&¬*Y*)∨ (*X*→*Z*);

8) (*X*↔*Y*)→ (*X*&*Z*);

9) (*X*↔*Y*)→ ((¬*X*→*Z*)→¬*Y*);

10) (*X*¬∨ (*Y*→*Z*))&(*X*∨*Z*);

11) *X*→ (¬ (*Y*→*Z*));

12) (*X*&*Y*)∨ (*Z*→¬*Y*);

13) (*X*↔*Z*)→ (*X*&¬*Y*);

14) (*X*∨ (*Y*→ (*Z*↔ (*X*&*Y*)));

15) ((*X*&¬*Y*)∨*Z*)&(¬*Y*→*Z*);

16) (*X*↔*Y*)&(*Y*→*Z*)&(*Z*→*X*);

17) (*X*∨*Y*)→*Z*)→¬*X*;

18) (¬*Z*→¬*Y*)→ ((*X*&¬*Z*)&*Y*);

19) (*X*↔*Y*)&( ¬*Z*→(*Y*&¬*X*));

20) ((*X*∨¬*Z*)&*Y*)↔ ((*Y*∨¬*X*)&*Z*).

1. Привести равносильными преобразованиями к СДНФ формулу¬(*X*∨*Z*)&(*X*→*Y*).

Удалим импликацию: ¬(*X*∨*Z*)&(*X*→*Y*)≅¬(*X*∨*Z*)&(¬*X*∨*Y*);преобразуем по законам де Моргана: ¬(*X*∨*Z*)&(¬*X*∨*Y*)≅ (¬*X*&¬*Z*)&(¬*X*∨*Y*);применим законы дистрибутивности: (¬*X*&¬*Z*)&(¬*X*∨*Y*)≅ (¬*X*&¬*X*&¬*Z*)∨ (¬*X*&*Y*&¬*Z*);удалим повторяющиеся переменные: (¬*X*&¬*X*&¬*Z*)∨ (¬*X*&*Y*&¬*Z*)≅ (¬*X*&¬*Z*)∨ (¬*X*&*Y*&¬*Z*). Преобразуем полученное выражение к совершенной форме: (¬*X*&¬*Z*)∨ (¬*X*&*Y*&¬*Z*)≅(¬*X*&¬*Z*&(*Y*∨¬*Y*))∨ (¬*X*&*Y*&¬*Z*)≅(¬*X*&*Y*&¬*Z*) ∨(¬*X*&¬*Y*&¬*Z*) ∨ (¬*X*&*Y*&¬*Z*);удалим повторяющийся одночлен (¬*X*&*Y*&¬*Z*), получим ответ: (¬*X*&*Y*&¬*Z*) ∨(¬*X*&¬*Y*&¬*Z*).

1. Привести равносильными преобразованиями к СКНФ формулу¬(*X*∨*Z*)&(*X*→*Y*).

Решение (аналогично предыдущему примеру). ¬(*X*∨*Z*)&(*X*→*Y*)≅¬(*X*∨*Z*)&(¬*X*∨*Y*) ≅(¬*X*&¬*Z*)&(¬*X*∨*Y*)≅¬*X*&(¬*Z*∨*Y*&¬*Z*)≅¬*X*&¬*Z*≅¬*X*&¬*Z* (¬*X*∨(*Y*&¬*Y*)∨(*Z*&¬*Z*))&(¬*Z*∨(*X*&¬*X*)∨(*Y*&¬*Y*)) ≅ (¬*X*∨*Y*∨*Z*) & (¬*X*∨*Y*∨¬*Z*) & (¬*X*∨¬*Y*∨*Z*) & (¬*X*∨¬*Y*∨¬*Z*) & (*X*∨*Y*∨¬*Z*) & (*X*∨¬*Y*∨¬*Z*) & (¬*X*∨*Y*∨¬*Z*) & (¬*X*∨¬*Y*∨¬*Z*).

Ответ: (¬*X*∨*Y*∨*Z*) & (¬*X*∨*Y*∨¬*Z*) & (¬*X*∨¬*Y*∨*Z*)&(*X*∨*Y*∨¬*Z*) & (*X*∨¬*Y*∨¬*Z*) & (¬*X*∨¬*Y*∨¬*Z*).

1. Преобразовать СДНФ, полученную в задаче 1, к СКНФ и сравнить с ответом в задаче 2.

Ответ в задаче 1: *F*(*X*,*Y*,*Z*)= (¬*X*&*Y*&¬*Z*)∨(¬*X*&¬*Y*&¬*Z*).

СДНФ отрицания данной формулы¬*F*(*X*,*Y*,*Z*) строится по тем наборам переменных, на которых исходная формула *F*(*X*,*Y*,*Z*) принимает значение 0. Поэтому СДНФ ¬*F*(*X*,*Y*,*Z*) содержит те конъюнктивные одночлены, которые не вошли в СДНФ функции *F*(*X*,*Y*,*Z*). В нашем примере:

¬*F*(*X*,*Y*,*Z*) = (¬*X*&¬*Y*&*Z*) ∨ (¬*X*&*Y*&*Z*) ∨ (*X*&¬*Y*&¬*Z*) ∨ (*X*&¬*Y*&*Z*) ∨ (*X*&*Y*&¬*Z*)∨(*X*&*Y*&*Z*).

Теперь возьмем отрицание формулы ¬*F*(*X*,*Y*,*Z*), и применим законы де Моргана (заменив & на ∨, ∨ на & и *X*, *Y*, *Z* на ¬*X*, ¬*Y*, ¬*Z*), получим СКНФ: = (X∨Y∨¬Z) & (X∨¬Y∨¬Z) & (¬X∨Y∨Z) & (¬X∨Y∨¬Z) & (¬X∨¬Y∨Z) & (¬X∨¬Y∨¬Z), что совпадает с решением в задаче 2.

* 1. Тавтологии алгебры высказываний

1. Формула *F*(*X*1,*X*2,…,*X*n) называется *тавтологией*, если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее переменных.

Обозначение тавтологии: *F*(*X*1,*X*2,…,*X*n)   .

В практических заключениях часто используют следующие тавтологии (*P*, *Q*, *R* – произвольные формулы):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | *P*∨¬*P* | - закон исключенного третьего |
| 2. | ¬(*P*&¬*P*) | - закон отрицания противоречия |
| 3. | ¬(¬*P*) ↔*P* | - закон двойного отрицания |
| 3. | *P*→*P* | - закон тождества |
| 4. | (*P*→*Q*) ↔ (¬*Q*→¬*P*) | - законконтрапозиции |
| 5. | ((P →*Q*) & (*Q*→*R*)) → (*P*→*R*) | - закон силлогизма (правило цепного заключения) |
| 6. | (*P*↔*Q*) ↔ (¬*P*↔¬*Q*) | - закон противоположности |
| 7. | *P*→ (*Q*→*P*) | - правило добавления антецедента («истина из чего угодно») |
| 8. | ¬*P*→ (*P*→*Q*) | - правило «из ложного что угодно» |
| 9. | (*P*& (*P*→*Q*)) →*Q* | - правило modus ponens |
| 10. | ((*P*→*Q*) &¬*Q*) →¬*P* | - правило modus tollens |
| 11. | (*P*→ (*Q*→*R*)) ↔ (*Q*→ (*P*→*R*)) | - правило перестановки посылок |
| 12. | (*P*→ (*Q*→*R*)) ↔ ((*P*&*Q*) →*R*) | - правило объединения (и разъединения) посылок |
| 13. | ((*P*→*R*) & (*Q*→*R*)) ↔ ((*P*∨*Q*) →*R*) | - правило разбора случаев |
| 14. | ((¬*P*→*Q*) & (¬*P*→¬*Q*)) →*P*,  (¬*P*→ (*Q*&¬*Q*)) →*P* | - правила приведения к абсурду |
| 15. | (*P*&*Q*) →*P*, (*P*&*Q*) →*Q* | - правила разъединения конъюнкции |
| 16. | *P*→ (*P*∨*Q*), *Q*→ (*P*∨*Q*) | - правила добавления к дизъюнкции |
| 17. | ((*P*→*Q*) →*P*) →*P* | - закон Пирса |

Эти формулы легко проверить по таблицам истинности при всевозможных значениях *P*, *Q*, *R*.

Основное значение тавтологий состоит в том, что некоторые из них предоставляют правильные способы построения умозаключений, т.е. такие способы, которые от истинных посылок всегда приводят к истинным выводам. В частности любая тавтология логики высказываний вида *F*→*G* соответствует общей схеме правильного логического умозаключения. Например, возьмем тавтологию ((¬*X*→*Y*)&(¬*X*→¬*Y*))→*X.* Схема логического умозаключения, опи­сываемая данной тавтологией, часто используется в математичес­ких доказательствах. Она состоит в следующем. Допустим, что тре­буется доказать истинность некоторого утверждения *А*. Предполага­ется, что истинно его отрицание ¬*A*. Затем доказывается, что име­ется некоторое такое утверждение *В*, для которого истинными явля­ются оба утверждения ¬*А*→*В* и ¬*А*→¬*B*. Доказательства истинно­сти этих импликаций зависят от содержания высказываний *А* и *В* и устанавливаются на основании методов и законов той математи­ческой теории, к которой они относятся. Считаем, что истинность утверждений ¬*А*→*В* и ¬*А*→¬*B* установлена. Одновременный вывод двух утверждений *В* и ¬*B* — противоречие, абсурд. Тогда утверждаем, что истинно высказывание А. Такой метод доказательства называет­ся *методом приведения к абсурду*.

Для получения новых тавтологий из уже имеющихся можно использовать следующие правила.

1. (правило «модус-поненс»). Если и *F*→*H*, то *H*.

Пусть в формуле *F* (…,*X*,…) содержится пропозициональная переменная *X*, и *H(Y1,…,Yn)* – любая формула. Тогда через обозначим формулу *S=F(…,H(Y1,…,Yn),…)*, полученную из *F* в результате подстановки в нее формулы *H* вместо всех вхождений переменной *X*.

1. (правило подстановки).Если *F*(…, *X*,…), то для любой формулы *H*.

Между понятием равносильности фор­мул и понятием тавтологии существует тесная связь.

1. (признак равносильности формул). Две формулы *F* и *Н* алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула *F*↔*Н* является тавтологией, т.е. *F*≅*Н*  эквивалентно  *F*↔*Н  .*

Поэтому все рассмотренные ранее равносильности можно также представить в форме тавтологий.

1. Тавтологии

Докажите, что:

1) если *F*&*G*, *F*↔*H*, то *G*→*H*;

2) если*F*∨*G*, *G*→*H*, то *F*∨*H*;

3) если ¬*F*→*G*, ¬*G*∨¬*H*,то *H*→*F*

4) если *G*&*H*, *F*∨*G*, то *F*→*H*;

5) если *F*∨*G*, *F*↔*G*, то *G*;

6) если*F*, *F*↔*G*, *F*↔*H*, то *G*&*H*;

7) если ¬*F*→*G*, *G*&¬*H*, то *F*∨*H*;

8) если *F*↔*G*, *G*↔*H*, то *F*↔*H*;

9) если *F*, *G*, *H*, то *F*→(*G*→*H*);

10) если *F*&*G*, *G*→¬*H*, то *F*&¬*H*;

Выясните, справедливы ли следующие утверждения (если утверждение несправедливо, то постарайтесь определить, обе его части «тогда» и «только тогда» не выполняются или только одна):

11) *F*↔*G* тогда и только тогда, когда (*F*→*G*)&(*G*→*F*)

12) *F*∨*G* тогда и только тогда, когда *F* или *G*;

13) *F*↔*G* тогда и только тогда, когда *F*→*G* и *G*→*F*;

14) *F*∨*G* тогда и только тогда, когда *F* и *G*;

15) *F*→*G* тогда и только тогда, когда *F*;

16) *F*→*G* тогда и только тогда, когда *G*;

17) *F*→*G* тогда и только тогда, когда *F* или *G*;

18) *F*&*G* тогда и только тогда, когда *F* и *G*;

19) *F*↔*G* тогда и только тогда, когда *F* и *G*;

20) *F*→*G* тогда и только тогда, когда *F* или *G*.

1. Докажите, что если ¬*F*∨*G*, ¬*G*∨¬*H*, то *F*→¬*H*;

Пусть*F*(*X*1,*X*2,…,*X*n), *G*(*X*1,*X*2,…,*X*n), *H*(*X*1,*X*2,…,*X*n) – формулы, о которых идет речь в задаче. Предположим, что формула *F*→¬*H* не является тавтологией. Это означает, что существуют такие конкретные высказывания*A*1,*A*2,…,*A*n, что высказывание¬*H*(*A*1,*A*2,…,*A*n) ложно, а *F*¬*G*∨¬*H* истинно. Далее, так как формула ¬*F*∨*G* является тавтологией, то высказывание *G*(*A*1,*A*2,…,*A*n) истинно. Но с другой стороны, поскольку ¬*G*∨¬*H –* тавтология, то высказывание ¬*G*(*A*1,*A*2,…,*A*n) истинно. Получили противоречие. Следовательно, формула *F*→¬*H -* тавтология.

1. Докажите, что если *G*→*F*, (¬*F*&*H*) ↔*G*, *H*, то  ¬*G*&*H*.

Предположим, что посылка данного утверждения верна, а заключение нет, т.е. формулы *G*→*F,*(¬*F*&*H*) ↔*G* и *H* являются тавтологиями, а формула ¬*G*&*H –* нет. Последнее означает: найдутся такие конкретные высказывания *A*1,*A*2,…,*A*n, что высказывание ¬*G*(*A*1,*A*2,…,*A*n)&*H*(*A*1,*A*2,…,*A*n) будет ложным. Это, в свою очередь возможно лишь в том случае, когда по меньшей мере одно из высказываний¬*G*(*A*1,*A*2,…,*A*n) или *H*(*A*1,*A*2,…,*A*n)будет ложным. Высказывание *H*(*A*1,*A*2,…,*A*n) ложным быть не может, поскольку это противоречило бы тождественной истинности формулы *H*(*X*1,*X*2,…,*X*n) Следовательно, ложно высказывание ¬*G*(*A*1,*A*2,…,*A*n) и, значит истинно высказывание *G*(*A*1,*A*2,…,*A*n). А раз так, то из истинности высказывания *G*(*A*1,*A*2,…,*A*n)→*F*(*A*1,*A*2,…,*A*n) вытекает истинность высказывания *F*(*A*1,*A*2,…,*A*n).

Обратимся теперь к высказыванию (¬*F*(*A*1,*A*2,…,*A*n)&*H*(*A*1,*A*2,…,*A*n)) ↔*G*(*A*1,*A*2,…,*A*n) которое истинно, поскольку формула (¬*F*&*H*) ↔*G* по предположению является тавтологией.

Ввиду истинности высказывания *F*(*A*1,*A*2,…,*A*n) левая часть рассматриваемой эквивалентности есть ложное высказывание. Значит, ее правая часть, т.е. высказывание *G*(*A*1,*A*2,…,*A*n), также ложна. Но это противоречит истинности этого высказывания, установленной в предыдущем абзаце.

Таким образом, сделанное допущение приводит к противоречию. Следовательно, допущение неверно, а верно доказываемое утверждение.

1. *F*→*G* тогда и только тогда, когда *F* и *G*.

Данное утверждение в полном объеме несправедливо: неверна его часть «тогда» (необходимость). Для подтверждения этого нужно указать такие конкретные формулы *F* и *G*, чтобы по меньшей мере одна из них не была тавтологией, а формула *F*→*G* была бы тавтологией. Вот пример таких формул: *F*≅*P*, *G*≅*Q*→*P*. Ни одна из них не является тавтологией, но формула *P*→(*Q*→*P*) – тавтология. *Приведите самостоятельно аналогичный пример.*

Рассмотрим теперь часть «только тогда» (достаточность) данного утверждения. Оказывается, она верна. В самом деле, предположим, что *F* и *G*. Это означает, что для любых высказываний *A*1,*A*2,…,*A*n высказывания *F*(*A*1,*A*2,…,*A*n) и *G*(*A*1,*A*2,…,*A*n) будут истинными.

Следовательно, для любых высказываний *A*1,*A*2,…,*A*n истинным будет и высказывание *F*(*A*1,*A*2,…,*A*n)→*G*(*A*1,*A*2,…,*A*n). А это означает, что формула *F*→*G* является тавтологией.

1. ¬ (*F*∨*G*) тогда и только тогда, когда ¬*F* и ¬*G*.

Покажем, что данное утверждение справедливо. Необходимость. Пусть  ¬ (*F*∨*G*). Следовательно, формула *F*∨*G* тождественно ложна. Но тогда, ввиду определения дизъюнкции, тождественно ложны обе формулы *F*и *G*. А раз так, то отрицание каждой из этих формул ¬*F* и ¬*G* будет принимать лишь истинные значения, т.е. ¬*F* и ¬*G*. *Докажите достаточность самостоятельно: убедитесь, что каждый логический шаг, сделанный при доказательстве необходимости, может быть проделан в обратном направлении.*

* 1. Логический вывод

1. Формула *H*(*X*1,*X*2,…,*X*n) называется *логическим следствием* формул *F1*(*X*1,*X*2,…,*X*n), …, *Fm*(*X*1,*X*2,…,*X*n), если формула *H*(*X*1,*X*2,…,*X*n) превращается в истинное высказывание при всякой подстановке вместо переменных *X*1,*X*2,…,*X*n конкретных высказываний, при которой в истинное высказывание превращаются все формулы *F1*(*X*1,*X*2,…,*X*n), …, *Fm*(*X*1,*X*2,…,*X*n).

Обозначение логического следования: *F1*, …, *FmH*.

Формулы *F1*, …, *Fm* называются *посылками*, *H* – *логическим следствием*.

1. (признак логического следствия). Формула *H* будет логическим следствием формулы *F* тогда и только тогда, когда формула *F*→*H* является тавтологией: *FH* эквивалентно *F*→*H*
2. (следование и равносильность). Две формулы алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда каждая из них является логическим следствием другой: F≅H эквивалентно *FH* и *HF*
3. Для любых формул *F*1,*F*2,…,*F*m, *H*(*m*≥ 2) следующие утверждения равносильны:
4. *F*1,*F*2,…,*F*m*H* эквивалентно
5. *F*1&*F*2&…&*F*m*H* эквивалентно
6. (*F*1&*F*2&…&*F*m) →*H*.
7. (свойства логического следования). Отношение логического следования между формулами алгебры высказываний обладает следующими свойствами:

а) *F*1,*F*2,…,*F*m*F*i для *i*=1, 2, …, *m*;

б) если *F*1,*F*2,…,*F*m*G*jдля *j*=1, 2, …, *p*и *G*1,*G*2,…,*G*p*H*, то *F*1,*F*2,…,*F*m*H*.

1. Логическоеследование

Докажите, что справедливы следующие логические следования, руководствуясь определением этого понятия; выясните, будут ли верны обратные следования, т.е. будет ли формула, стоящая слева логическим следованием формулы справа:

1) *P*↔*Q P*→*Q*;

2) *P*↔¬*Q P*∨*Q*;

3) *P&Q P*∨*Q*;

4) ((*P*&*Q*)→ (*P*∨*Q*))→*P P*∨*Q*;

5) (*P*∨*Q*)→ (*P*&*Q*) *P*→*Q*;

6) *P*&¬*Q* (¬*P*∨*Q*)→¬*Q*;

7) (*P*→*Q*)→¬*Q* (¬*Q*→*P*)→*P*;

8) (¬*Q*→*P*)→*P* ¬(*Q*→*P*)→ (*P*↔*Q*);

9) (*P*→*Q*)&(¬*P*→*Q*) *Q*;

10) ¬(*P*&*Q*)&*P* ¬*Q*;

11) (*P*∨¬*R*)→*Q* (*P*→*Q*)&*R*;

12) (*P*→*Q*)→*RP*→ (*Q*→*R*);

13) (*P*∨*Q*)→*R* (*P*&¬*Q*)∨*R*;

14) (*P*→*Q*)→*R*  (*P*&*Q*)→*R*;

15) (*P*&*Q*)→*R P*→ (*Q*→*R*);

16) (*P*↔*Q*)∨*R* (¬*P*→¬*Q*)∨*R*;

17) (*P*∨*R*)↔*Q*  (*P*∨*R*)↔*R*;

18) ¬(*P*∨*Q*) ¬*P*∨*R*;

19) (*P*∨*Q*)→*R*  (*P*→*Q*)∨ (*P*↔*R*);

20) *P*&(*Q*∨*R*) (*P*∨*Q*)&(*P*∨*R*);

1. ¬*P*&¬*Q*¬(*P*&*Q*).

Составим сначала таблицу истинности для формулы¬*P*&¬*Q*, стоящей слева от знака логического следования, и для формулы¬(*P*&*Q*), стоящей справа от этого знака:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *P* | *Q* | ¬*P* | ¬*Q* | ¬*P*&¬*Q* | *P*&*Q* | ¬(*P*&*Q*) |
| строка 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| строка 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| строка 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| строка 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
|  |  |  |  |  | (\*) |  | (\*\*) |

Итак, логические значения данных формул ¬*P*&¬*Q* и ¬(*P*&*Q*) представлены в столбцах построенной таблицы, отмеченных знаками (\*) и (\*\*) соответственно. Сравним теперь эти столбцы, руководствуясь определением логического следования. Столбцы нужно сравнивать построчно. В первой строке столбца (\*) стоит 1. Следовательно (на основании определения логического следования), мы должны посмотреть, стоит ли также 1 в первой строке столбца (\*\*), т.е. принимает ли значение 1 формула ¬(*P*&*Q*) на том наборе значений пропозициональных переменных, на котором приняла значение 1 формула ¬*P*&¬*Q*(в данной строке этот набор таков:*P*=0 и*Q*=0). Посмотрев на первую строку столбца (\*\*), мы убеждаемся, что в данном случае это действительно так.

Во второй строке в столбце (\*) стоит 0. Определение логического следования в этом случае никаких требований к логическому значению второй формулы ¬(*P*&*Q*) не предъявляет: ее значение в этой строке (т.е. при*P*=0 и*Q*=1 может быть любым. Поэтому мы можем даже не смотреть, какое значение имеется во второй строке столбца (\*\*).

Переходим к третьей строке. В столбце (\*) обнаруживаем также значение 0. Поэтому переходим к четвертой, заключительной строке таблицы. В столбце (\*) в этой строке – снова 0.

Таким образом, *все* строки таблицы просмотрены. Мы обнаружили при этом, что на всяком наборе значений переменных, на котором первая формула ¬*P*&¬*Q* принимает значение 1 (в нашем случае это лишь первая строка), и вторая формула ¬(*P*&*Q*) непременно принимает значение 1. По определению логического следствия это и означает, что формула ¬(*P*&*Q*) является логическим следствием формулы ¬*P*&¬*Q*, т.е. ¬*P*&¬*Q* ¬(*P*&*Q*)

Дадим теперь ответ на второй вопрос, является ли формула ¬*P*&¬*Q* логическим следованием формулы ¬(*P*&*Q*). Посмотрим, например, во вторую строку построенной таблицы: в ней в столбце (\*\*) стоит 1, а в столбце (\*) – 0. Это означает, что формула ¬(*P*&*Q*) при значениях переменных *P*=0 и *Q*=1 принимает значение 1, в то время как формула ¬*P*&¬*Q* на том же наборе значений переменных принимает значение 0. Не глядя более ни в какие другие строки таблицы (достаточно одного несовпадения), на основании определения логического следствия заключаем, что формула ¬*P*&¬*Q* не является логическим следствием формулы ¬(*P*&*Q*).

1. (*P*&*Q*)∨*R P*∨ (*Q*→*R*).

Составим таблицу истинности для формул (*P*&*Q*)∨*R* и *P*∨ (*Q*→*R*), участвующих в отношении следования:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *P* | *Q* | *R* | *P*&*Q* | (*P*&*Q*)∨*R* | *Q*→*R* | *P*∨(*Q*→*R*) |
| строка 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| строка 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| строка 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| строка 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| строка 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| строка 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| строка 7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| строка 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  |  |  |  |  | (\*) |  | (\*\*) |

Последовательный просмотр по строкам столбцов (\*) и (\*\*) показывает, что как только в какой-либо строке столбца (\*) появляется 1, так сейчас же в этой строке и в столбце (\*\*) обнаруживается 1. Значит, требуемое логическое следование действительно выполняется.

Обратное же следование неверно, поскольку, например, в первой же строке (т.е. при *P*=0, *Q*=0 и *R*=0 формула *P*∨(*Q*→*R*) принимает значение 1 (столбец (\*\*)), а формула (*P*&*Q*)∨*R* принимает значение 0 (столбец (\*)).

* 1. Применение нормальных форм

Одним из применений СКНФ и СДНФ является возможность сравнения формул. Однако, не менее важным применением нормальных форм являются *нахождение следствий из данных посылок* и *нахождение посылок для данного следствия.*

1. Формула *H*(*X*1,*X*2,…,*X*n), не являющаяся тавтологией, тогда и только тогда будет логическим следствием формул *F*1(*X*1,*X*2,…,*X*n),…,*F*m(*X*1,*X*2,…,*X*n), не все из которых фвляются тавтологиями, когда все совершенные дизъюнктивные одночлены из СКНФ формулы *H* входят в СКНФ формулы *F*1(*X*1,*X*2,…,*X*n)&…&*F*m(*X*1,*X*2,…,*X*n).
2. Нахождение всех следствий их данных посылок:
   1. найти СКНФ формулы

*G*(*X*1,*X*2,…,*X*n)≅*F*1(*X*1,*X*2,…,*X*n)&…&*F*m(*X*1,*X*2,…,*X*n);

* 1. выписать все совершенные дизъюнкты найденной СКНФформулы *G*, а также всевозможные их конъюнкции

Полученное множество формул и является искомым.

1. Чтобы найти все формулы, логическим следствием каждой из которых будет данныя формула *G*(*X*1,*X*2,…,*X*n) нужно действовать по следующему *алгоритму:*
2. Нахождение посылок для данного следствия:
3. выявить все совершенные дизъюнкты, которые отсутствуют в СКНФ формулы *G*(*X*1,*X*2,…,*X*n);
4. составить всевозможные конъюнкции формулы *G*(*X*1,*X*2,…,*X*n) с этими недостающими совершенными дизъюнктами.

Получившееся множество формул, вместе с формулой *G* будет искомым с точностью до равносильности формул.

1. Логическое следование и применение нормальных форм

Найдите все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры высказываний, являющиеся логическими следствиями следующих формул (посылок):

|  |  |
| --- | --- |
| 1) *X*→*Y* и *X*;  2) *X*→*Y* и ¬*Y*;  3) *X*↔*Y* и ¬*X*;  4) *X*∨*Y* , *X* и ¬*Y*;  5) *X*→*Y* и *Y*→*Z* ; | 6) *X*↔*Y* и *Y*↔*Z*;  7) (*X*&*Y*)→*Z* и *X*∨*Y*;  8) (*X*&*Y*)→*Z* и *Y*→*X* ;  9) *X*→*Y*, *Y*∨*Z* и (*X*&*Y*) ↔*Z*;  10) (*X*&*Y*)→¬*Z*, *Y* и *Z*. |

Найдите все не равносильные между собой и не тождественно ложные формулы алгебры высказываний, зависящие от переменных , для которых следующая формула является логическим следствием (за исключением самой данной формулы):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 11) ¬*X*∨¬*Y*;  12) *X*→*Y*;  13) *X*∨¬*Y*;  14) ¬(*X*∨*Y*); | 15) (*X*∨*Y*)→ (*X*&*Y*);  16) ¬*X*&*Y*;  17) (*X*∨*Y*)→¬*X*;  18) ¬*X*→*Y*; | 19) *X*↔¬*Y*; ;  20) ¬*X*→(*X*&*Y*). |

1. Найдите все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры высказываний, являющиеся логическими следствиями следующих формул (посылок):*X*→ (*Y*∨*Z*) и *Z*→*Y*.

*Решение:*Составляем конъюнкцию посылок и равносильными преобразованиями приводим ее к СКН-форме:

(*X*→ (*Y*∨*Z*))&(*Z*→*Y*) ≅(¬*X*∨*Y*∨*Z*)&(¬*Z*∨*Y*) ≅ (¬*X*∨*Y*∨*Z*)&((*X*&¬*X*)∨*Y*∨¬*Z*) ≅ (¬*X*∨*Y*∨*Z*)&(*X*∨*Y*∨¬*Z*)&(¬*X*∨*Y*∨¬*Z*).

Логическими следствиями из данных посылок будут все совершенные дизъюнктивные одночлены, входящие в полученную СКН-форму, а также возможные конъюнкции этих одночленов по два, по три и т.д. Выписываем получающиеся формулы, придав им более удобную равносильную форму.

Ответ:

1. ¬*X*∨*Y*∨*Z*≅*X*→ (*Y*∨*Z*) (первая посылка);
2. *X*∨*Y*∨¬*Z*≅*Z*→ (*X*∨*Y*);
3. ¬*X*∨*Y*∨¬*Z*≅ (*X*&*Z*) →*Y*;
4. (¬*X*∨*Y*∨*Z*)&(*X*∨*Y*∨¬*Z*) ≅ (*X*↔*Z*) ∨*Y*;
5. (¬*X*∨*Y*∨*Z*)&( ¬*X*∨*Y*∨¬*Z*) ≅ (¬*X*∨*Y*) ∨ (*Z*&¬*Z*) ≅¬*X*∨*Y*≅*X*→*Y*;
6. (*X*∨*Y*∨¬*Z*)&( ¬*X*∨*Y*∨¬*Z*) ≅*Z*→*Y* (вторая посылка);
7. (¬*X*∨*Y*∨*Z*)&(*X*∨*Y*∨¬*Z*)&( ¬*X*∨*Y*∨¬*Z*) ≅ (*X*→(*Y*∨*Z*))&(*Z*→*Y*) ≅ (*X*∨*Z*) →*Y*.
8. Найдите все не равносильные между собой и не тождественно ложные формулы алгебры высказываний, зависящие от переменных , для которых следующая формула является логическим следствием: X↔Y.

*Решение:* Приведем сначала данную формулу к СКН-форме: *X*↔*Y*≅ (*X*→*Y*)&(*Y*→*X*) ≅ (¬*X*∨*Y*)&(¬*Y*∨*X*).

Недостающими в этой форме дизъюнктивными одночленами вида *X*\*∨*Y*\* являются *X*∨*Y* и ¬*X*∨¬*Y*. Поэтому искомыми посылками для данной формулы, согласно теореме 1.12, являются формулы:

1. (*X*↔*Y*)&(*X*∨*Y*) ≅ (¬*X*∨*Y*)&(*X*∨¬*Y*)&(*X*∨*Y*) ≅(¬*X*∨*Y*)&*X*≅*X*&*Y*;
2. (*X*↔*Y*)&( ¬*X*∨¬*Y*) ≅ (¬*X*∨*Y*)&(*X*∨¬*Y*)&(¬*X*∨¬*Y*) ≅ (¬*X*∨*Y*)&¬*Y*&(*X*∨¬*X*)≅¬*X*&¬*Y*,
3. (*X*↔*Y*)&(*X*∨*Y*)&( ¬*X*∨¬*Y*) ≅ (¬*X*∨*Y*)&(*X*∨¬*Y*)&(*X*∨*Y*)&( ¬*X*∨¬*Y*) ≅ (¬*X*∨*Y*)&( ¬*X*∨¬*Y*)&*X*≅¬*X*&*X*≅ 0.

Итак, всякая формула, для которой формула *X*↔*Y* является логическим следствием, равносильна либо формуле *X*&*Y*, либо формуле ¬*X*&¬*Y*, либо тождественно ложна. Поскольку из тождественно ложной формулы логически следует любая формула, то впредь мы не будем упоминать тождественно ложную формулу в числе возможных посылок для данной формулы (за исключением случая, когда тождественно ложная формула является единственной посылкой для данной формулы). Ответ: *X*&*Y,* ¬*X*&¬*Y.*

* 1. Структура математических теорем

Многие математические теоремы имеют структуру, Выражаемую формулой *X*→*Y*(*прямая теорема*).

Утверждение *X* называется *условием теоремы*, а утверждение *Y* – *ее заключением*.

Утверждение *Y*→*X* называется *обратным* для данной теоремы. Это утверждение может быть справедливым, тогда оно называется *обратной теоремой* для теоремы*X*→*Y*. Если *Y*→*X* не выполняется, то говорят, что обратная теорема не верна. Так как формулы *X*→*Y* и *Y*→*X* не равносильны, то доказательство прямой теоремы не дает оснований утверждать о справедливости обратной теоремы.

Для теоремы *X*→*Y*можно сформулировать *противоположное* утверждение:

*¬X*→*¬Y*, а также теорему, *обратную противоположной*: *¬Y*→*¬X*. Поскольку *X*→*Y*≅*¬Y*→*¬X*, то доказательство прямой теоремы равносильно доказательству теоремы обратной противоположной и наоборот. На этом свойстве основаны два способа доказательства теорем: прямое доказательство и доказательство «от противного». Аналогично, *Y*→*X*≅*¬X*→*¬Y*, то есть *обратная и противоположная теоремы эквивалентны*.

Если некоторая математическая теорема имеет структуру, выражаемую формулой X→Y, то высказывание Y называется *необходимым* условием для высказывания X (если X истинно, то Y с необходимостью должно быть истинным), а высказывание X называется *достаточным* условием для высказывания Y (для того, чтобы Y было истинным, достаточно, чтобы истинным было X).

Одно и то же утверждение может иметь несколько необходимых условий. Например, необходимыми условиями «равенства всех сторон четырехугольника» (A1) являются «перпендикулярность диагоналей четырехугольника» (B1), «деление диагоналей точкой их пересечения пополам» (B2) и т.д.

Аналогично, одно и то же утверждение может иметь несколько достаточных условий. Так, для «перпендикулярности диагоналей четырехугольника» (B1) достаточно «равенства всех его сторон» (B3), достаточно также, чтобы в нем было «две пары равных смежных сторон» (B4).

После того, как доказана теорема *X*→*Y*, возникает вопрос, является ли найденное необходимое условие достаточным, то есть верна ли обратная теорема *Y*→*X*. Если справедливы утверждения *X*→*Y* и *Y*→*X* (т.е. справедливо *X*↔*Y*), то говорят, что *Xнеобходимое и достаточное условие* для *Y*, а *Y* - необходимое и достаточное условие для *X*.

Поиск необходимых и достаточных условий происходит приблизительно следующим образом. Предположим, что требуется найти необходимое и достаточное условие для некоторого утверждения *X*. Начинают с отыскания необходимых условий для X, то есть таких утверждений *Y*1, *Y*2,…, следующих из *X*: *X*→*Y*1, *X*→*Y*2, … При этом каждый раз анализируют, не окажется ли найденное условие или их конъюнкция достаточным условием для *X*, то есть справедливы импликации *Y*1→*X*, *Y*2→*X*, …, (*Y*1&*Y*2)→*X*, …

1. Найти необходимое и достаточное условие того, «что выпуклый четырехугольник является квадратом» (A). Находим ряд необходимых условий для этого утверждения:

* «диагонали четырехугольника перпендикулярны» (B1);
* «диагонали четырехугольника равны» (B2);
* «диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам (B3).

Ясно, что каждое из утверждений A→B1, A→B2, A→B3 верно. Анализируем обратные утверждения. Очевидно, что неверны следующие утверждения:

|  |  |
| --- | --- |
| Утверждение | Контрпример |
| B1→A | ромб, не являющийся квадратом |
| B2→A | прямоугольник, не являющийся квадратом |
| B3→A | параллелограмм |
| (B1& B2)→A | четырехугольник, в котором диагонали перпендикулярны, равны, но точка пересечения не делит хотя бы одну диагональ пополам |
| (B1& B3)→A | ромб, не являющийся квадратом |
| (B2& B3)→A | прямоугольник, не являющийся квадратом |

И только конъюнкция всех трех условий B1&B2&B3 дает условие, достаточное для A: истинно утверждение B1&B2&B3→A. Кроме того, из истинности A→B1, A→B2, A→B3 следует истинность A→B1&B2&B3. Итак, необходимым и достаточным условием для A является условие B1&B2&B3.

* 1. Логический вывод теорем

Фундаментальная проблема логики (проблема дедукции), называемаятакже*проблемой вывода*, состоит в следующем: определить, является ли формула *H* логическим следствием множества формул *A*1,…, *A*n, т.е.справедливо или нет

*A*1, *A*2,…, *A*n  *H* или *A*1&*A*2&…&*A*n*H*

Здесь*A*1, *A*2,…, *A*n называются гипотезами, *H* – выводом из гипотез.

Выводу сопоставляется цепочка высказываний *F*1, *F*2,…, *F*k, где *F*k = *H*, а каждое высказывание *F*i либо является тавтологией, либо следует из гипотез *A*j, *j*=1,…*n*, и высказываний *F*1,.., *F*i-1, предшествующих данному.

Доказательство справедливости гипотез выводится на основании их семантики. Так как из лжи логически следует все, что угодно, то сначала нужно показать, что, хотя бы на одном наборе входящих в них переменных все гипотезы истины. Данное доказательство проводится индуктивными рассуждениями и не является задачей математической логики.

Построение цепочки высказываний *F*1, *F*2,…, *F*k= *H* строится по законам логического следования. Рассмотрим основные структуры правильного умозаключения.

Возьмем, например, тавтологию 9 из п. 1.5: (*P*& (*P*→*Q*)) →*Q.* Согласно теореме 1.11 данное утверждение равносильно логическому следованию:

*P*,*P*→*QQ*. Получили схему логически верного умозаключения или правило вывода: . Это правило называют *modus ponens*, а также *правилом заключения*. Оно означает, что от утверждения об истинности посылки *P* и посылки *P*→*Q* переходят к утверждению об истинности следствия *Q*. Для наглядности доказательства посылки принято писать над чертой, а следствие – под чертой.

Приведем, наиболее часто используемые схемы правильных умозаключений (проверьте самостоятельно, каким тавтологиям п.1.5 они соответствуют).

1. (*modusponens, правило заключения*): .
2. (*modus tollens*) : .
3. (*введение конъюнкции*): .
4. (*удаление конъюнкции*): .
5. (*введение дизъюнкции*): .
6. (*контрапозиции*): .
7. (*цепного заключения, силлогизма*): .
8. (*перестановки посылок*): .
9. (*объединение, разъединение посылок*): .
10. (*расширенная контрапозиция*): .
11. (*резолюций*): .

С помощью равносильных преобразований формул, можно получить производные правила вывода. Например, раскрывая импликацию в правиле 1, получим правило: , а заменяя в этом правиле *F* на ¬*S* – правило: .

Существует два принципиально различных способа доказательства теорем: «прямое» доказательство и «доказательство от противного».

* + 1. Прямой вывод

В прямом выводе, исходя из гипотез (высказываний, значения которых предполагаются истинными) и аксиом (тавтологий), строится цепочка логического вывода, конечным следствием которого является доказываемое утверждение.

1. Доказать или опровергнуть следствие:

*B*→¬*A*, *A*&*D*, *B*∨*C D*&*C*.

Пронумеруем гипотезы:*B*→¬*A*(Г1), *A*&*D*(Г2), *B*∨*C*(Г3), правила вывода обозначим (Пр1, …, Пр11), полученные логическим заключением высказывания будем нумеровать (F1, F2, …). В нижеприведенном выводе заключения обозначены так: *A*(F1), *D*(F2), ¬*B* (F3), *C*(F4).

Построим логический вывод: (Г2,Пр4); (Г2,Пр4); (Г2,F1,Пр2); (F3,Г3,Пр1); (F4,F2,Пр3). Последнее следствие *D*&*C*совпадает с тем, что требовалось доказать, т.е. *B*→¬*A*, *A*&*D*, *B*∨*CD*&*C* справедливо.

* + 1. Доказательство «от противного»

Из определения вывода и свойств логического следования (теорема 1.7) вытекает, что *A*1, *A*2,…, *A*n  *H* равносильно (*A*1&*A*2&…&*A*n) →*H*.

***Принцип дедукции*.** Формула *H* является логическим следствием конечного множества формул {*A*i} тогда и только тогда, когда (*A*1&*A*2&…&*A*n) &¬*H* невыполнимо, то есть:

*A*1, *A*2,…, *A*n , ¬*H* 0 или *A*1&*A*2&…&*A*n&¬*H* 0

На основе этого утверждения строится способ доказательства, который называется доказательством «от противного». Вэтом случае во множество посылок{*A*i} добавляется высказывание ¬*H*, равное отрицанию того, что необходимо вывести. После этого нужно доказать, что из расширенного множества формул выводимо противоречие.

1. Доказать или опровергнуть вывод:

*¬A*∨*B*, *B*→*C*, *A*∨*D C*∨*D.*

Обозначим, как в предыдущем примере: *¬A*∨*B*(Г1), *B*→*C*(Г2), *A*∨*D* (Г3). Введем еще одно высказывание ¬(*C*∨*D*) ≅¬*C*&¬*D*(Г4). Правила вывода обозначим (Пр1, …, Пр11), полученные логическим заключением высказывания будем нумеровать следующим образом: ¬*C*(F1), ¬*D* (F2), *A*(F3), *B*(F4), *C*(F5). Построим вывод: (Г4,Пр4); (Г4,Пр4); (F2,Г3,Пр1); (F3,Г1,Пр1); (F4,Г2,Пр1).

Высказывания ¬*С* (F1) и *C* (F5) противоречат друг другу. Следовательно, верно, что *C*∨*D.*

Доказательством «от противного» имеет смысл пользоваться, когда необходимо доказать утверждение вида дизъюнкции или следования. Первый случай, как следует из последнего примера, даёт для последующего доказательства сразу два утверждения. Во втором случае из того, что ¬(*B*→*C*) ≅*B*&¬*С*, следуют тоже два утверждения: *B* и ¬*С*. Используя их, необходимо вывести противоречие.

* + 1. Приведение к абсурду

Метод приведения к абсурду (противоречию) имеет две модификации, которые являются существенно различными как по форме, так и по суще­ству, т.е. по своей логической (дедуктивной) силе.

*Метод приведения противоположного утверждения к абсурду* со­стоит в следующем. Пусть требуется доказать утверждение *X*. Рас­сматривается (допускается) противоположное ему утверждение ¬*Х* и из него вы­водятся два противоречащих друг другу утверждения (т.е. некото­рое утверждение и его отрицание) *Y* и ¬*Y*: ¬*Х*→*Y* и ¬*Х*→¬*Y*. Из этого делается вывод о том, что справедливо исходное утвержде­ние *X*. Оправданием этому методу может служить следующая тав­тология: (¬*X*→¬*Y*) → (( ¬*X*→*Y*) →*X*).

*Метод приведения данного утверждения к абсур*ду состоит в сле­дующем. Пусть требуется опровергнуть утверждение *X*, т.е. дока­зать отрицательное утверждение ¬*Х*. В этом случае два противореча­щих друг другу утверждения *Y* и ¬*Y* выводятся из самого данного утверждения *X*: *X*→*Y*и *X*→¬*Y*. Из этого делается вывод о том, что справедливо утверждение ¬*Х*, т.е. дан­ное утверждение *X* опровергнуто. Оправданием этому методу слу­жит следующая формула, также являющаяся тавтологией: (*X*→¬*Y*) → ((*X*→*Y*) →¬*X*).

* + 1. Цепное заключение

Нередко в математических доказательствах используется правило *цепного заключения*, или правило *силлогизма* (см. правило 7). Пусть нужно доказать утверждение *R*. Находим такое утверждение *Q*, для которого можем доказать истинность утверждений *Р*→*Q* и *Q*→*R.* Тогда на основании правила силлогизма заключаем, что справедливо и утверждение *Р*→*R*.

Например, из двух теорем «Если треугольник равносторонний, то все его углы равны» и «Если в треугольнике все углы равны, то величина каждого его угла равна 60°» — по правилу силлогизма получаем теорему «Если треуголь­ник равносторонний, то величина каждого его угла равна 60°».

Существуют и другие методы математических доказательств, состоятельность которых подтверждается математической логикой.

* + 1. Метод резолюций

Логический вывод с помощью правил умозаключений (примеры 25, 26) может представлять собой длительную и плохо формализуемую процедуру. С появлением компьютеров возник интерес к алгоритмам автоматического доказательства теорем. Наиболее известным методом, пригодным для решения на компьютере, является метод резолюций.

Мы уже знаем, что доказательство теоремы *X*→*Y*сводится к доказательству общезначимости формулы *X*→*Y* или невыполнимости формулы *X*&¬*Y*0; в общем случае *X*=*X*1&*X*2&…&*X*n.

Рассмотрим правило вывода 11, называемое *правилом резолюций*:

Формула называется *резольвентой* формул и по *R*. Обратите внимание, что в дизъюнкции резольвенты входит *R* и ее отрицание. Пара дизъюнктов, содержащих переменную и ее отрицание, называется *контрарной парой*.

Обозначение резольвенты: *resR*(, )=

Если дизъюнкты не содержат *R* и ее отрицание, то резольвента для них не существует. Существует также нулевая резольвента:

*resR*(, )=0 .

Метод резолюций применяется к доказательству противоречивости множества формул {*X*1, *X*2,…,*X*n,¬*Y*}. Идея *метода резолюций* состоит в том, что к формулам из множества {*X*1, *X*2,…,*X*n,¬*Y*} применяется правило резолюций. Получаемые резольвенты тоже включаются в это множество и к ним также можно применять правило резолюций. Порождение резольвент выполняется до тех пор, пока не будет получена нулевая резольвента *resR*(, )=0. Это и будет означать, что множество {*X*1, *X*2,…,*X*n,¬*Y*} противоречиво, формула *X*1&*X*2&…&*X*n&¬*Y* тождественно ложна, а соответствующая теорема: *X*1, *X*2,…, *X*n– справедлива.

Однако, если нулевую резольвенту получить не удается, то окончательный ответ о несправедливости теоремы можно дать лишь после того как будут построены все возможные резольвенты. Поэтому метод резолюций лучше подходит для доказательства справедливости теорем.

В общем случае формулы из множества {*X*1, *X*2,…,*X*n,¬*Y*} могут не иметь вид дизъюнктов, к которым можно применять правило резолюций, но с помощью равносильных преобразований их всегда можно привести к требуемому виду.

Алгоритм *приведения формул из множества* {*X*1, *X*2,…,*X*n,¬*Y*} *к виду, пригодному для метода резолюций*:

1. построить конъюнктивную нормальную форму (КНФ) формулы *X*1&*X*2&…&*X*n&¬*Y*≅*D*1&*D*2& … &*D*k, где *D*i- дизъюнкты;
2. применять метод резолюций к множеству *S*={*D*1, *D*2,…, *D*k}.
3. Доказать*A*→*B*&*C*, *B*→*D*, *C*→*E*, ¬*A*→*F*  (*D*&*E*) *F*.

Справедливость данного вывода следует из противоречивости множества Г={*A*→*B*&*C*, *B*→*D*, *C*→*E*, ¬*A*→*F*, ¬((*D*&*E*) *F)*}. Приведем все формулы из Г к КНФ: {¬*A*, ¬*BD*, ¬*CE*, *AF* , (¬*D*¬*E*)&¬*F*} = {(¬*A*, ¬*BD*, ¬*CE*, *AF*, ¬*F*& (¬*D*¬*E*)}. Получим множество дизъюнктов *S*={¬*A,* , ¬*BD*, ¬*CE*, *AF*, ¬*F,* ¬*D*¬*E*}. Обратите внимание, что формула (¬*A* дает два дизъюнкта {¬*A,* }, аналогично, формула (¬*D*¬*E*)&¬*F* дает {¬*F,* ¬*D*¬*E*}. Для удобства пронумеруем формулы из множества *S*:

1. ¬*A,*
2. ,
3. ¬*BD*,
4. ¬*CE*,
5. *AF*,
6. ¬*F,*
7. ¬*D*¬*E*

Построим возможный резолютивный вывод нулевой резольвенты из *S*:

1. *resA*(¬*A, AF*)=*BF*; (1,5)
2. *resA*(¬*A, AF*)=*CF*; (2,5)
3. *resB*(¬*B, BF*)=*DF*; (3,8)
4. *resC*(*C ,* ¬*CE*)=*EF*; (9,4)
5. *resE*(*E ,* ¬*D*¬*E*)=*F*; (11,7)
6. *resD*(*D ,* ¬*D*F)=*FF* = *F*; (10,12)
7. *resF*(*F*, ¬*F*)=0. (13,6)

Полученная нулевая резольвента доказывает выполнимость логического следования *A*→*B*&*C*, *B*→*D*, *C*→*E*, ¬*A*→*F* (*D*&*E*) *F*.

Из алгоритма видно, что методом резолюций легче доказать невыполнимость множества*S*, для чего достаточно получить нулевую резольвенту. Доказательство выполнимости множества сводится к полному перебору всех вариантов. Поэтому метод резолюций применяется в качестве механизма доказательства «от противного» при реализации принципа дедукции.

Метод резолюций поддается алгоритмизации и может быть эффективно реализован на компьютере.

Если, перебрав все варианты, не удается получить нулевую резольвенту, значит логическое следование не верно.

1. Посылки: Заработная плата возрастет(A) только, если будет инфляция (B). Если будет инфляция, то увеличится стоимость жизни (C). Заработная плата не возрастет.

Заключение: Стоимость жизни увеличится.

Запишем условие в виде логического следования: *B*↔*A*, *B*→*C*, ¬*A C*.

Построим резолютивный вывод:добавим отрицание заключения к множеству гипотез Г={*B*↔*A*, *B*→*C*, ¬*A*, ¬*C*}={(¬*BA*)&(¬*AB*), ¬*BC*, ¬*A*, ¬*C*}, затем приведем все формулы из Г к КНФ, получим множество дизъюнктов: *S*={*A*¬*B*, ¬*AB*, ¬*BC*, ¬*A*, ¬*C*}. Пронумеруем формулы из множества *S*:

1. *A*¬*B*,
2. ¬*AB*,
3. ¬*BC*,
4. ¬*A*,
5. ¬*C.*

Попытаемся построить возможный резолютивный вывод нулевой резольвенты из *S*:

1. *resA*(*A,* ¬*AB*)=*B*¬*B* ≅ 1; (1,2)
2. *resB*(*A,* ¬*AB*)=*A*¬*A* ≅ 1; (1,2)
3. *resA*(*A,* ¬*A*)=; (1,4)
4. *resC*(*B,* ¬*A*)=; (3,5)
5. *resB*(¬*AB,*¬*B*)=¬*A*; (2,8)

Других резольвент больше нет, то есть логическое следование не верно. Убедимся в этом, подобрав такие значения переменных *A*, *B* и *C*, при которых обращается в 0 импликация (достаточно одного контрпримера, чтобы теорема не выполнялась): ((*B*↔*A*)&(*B*→*C*) &(¬*A*))*→C*=0. Импликация ложна только когда заключение ложно *C* =0, а посылка истинна ((*B*↔*A*)&(*B*→*C*) &( ¬*A*))=1. Решаем систему уравнений:

Решением этой системы будет; *A*=*B*=*C*=0, то есть действительно логическое следование не верно.

1. Метод резолюций

Выяснить, являются ли логически правильными следующие рассуждения. Доказательство провести методом резолюций (примеры 28, 29. Если логическое следование неверно, то показать, при каких значениях переменных оно нарушается.

Предварительно необходимо представить условие в виде формул алгебры высказываний.

1. Посылки: Или Пётр и Иван братья (A), или они однокурсники (B). Если Пётр и Иван братья, то Сергей и Иван не братья (C). Если Пётр и Иван однокурсники, то Иван и Михаил также однокурсники (D).

Заключение: или Сергей и Иван не братья, или Иван и Михаил однокурсники.

1. Посылки: Если Петр не встречал Ивана (A), то либо Иван не был на лекциях (B), либо Пётр лжёт (C). Если Иван был на лекциях, то Пётр встречал Ивана, и Сергей был в читальном зале после лекций (D). Если Сергей был в читальном зале после лекций, то либо Иван не был на лекциях, либо Пётр лжёт.

Заключение: Иван не был на лекциях.

1. Посылки: Наша футбольная команда либо выигрывает матч (A), либо проигрывает (B), либо сводит его к ничьей (C). Если матч выигран или проигран, то он не перенесён (D). Команда матч не выиграла и не свела его к ничьей.

Заключение: матч не перенесён и проигран

1. Посылки: Если Джон не встречал этой ночью Смита (A), то либо Джон был убийцей (B), либо Джон лжет (C). Если Смит не был убийцей (D), то Джон не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи (E). Если же убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джон лжет.

Заключение:Смит был убийцей.

1. Посылки: Если идет дождь (А), то нежарко (B). Если светит солнце (C), то жарко. Идет дождь.

Заключение: Нежарко или не светит солнце.

1. Посылки: Если идет дождь (A), то нежарко (B). Если светит солнце (C), то жарко. Идет дождь.

Заключение: Нежарко и не светит солнце.

1. Посылки: Экзамен сдан вовремя (A) или сессия продлена (B). Если сессия продлена, то не сдана курсовая работа (C) или не зачтены лабораторные работы (D). Курсовая работа сдана. Экзамен вовремя не сдан.

Заключение: Неверно, что если курсовая работа сдана, то лабораторные работы зачтены.

1. Посылки: Если исход скачек будет предрешен сговором (А) или в игорных домах будут орудовать шулеры(B), то доходы от туризма упадут (C) и город пострадает. Если доходы от туризма упадут, полиция будет довольна (D). Полиция никогда не бывает довольна.

Заключение: Исход скачек не предрешен сговором.

1. Посылки: Заработная плата возрастет (A) только, если будет инфляция (B). Если будет инфляция, то увеличится стоимость жизни (C). Заработная плата не возрастет.

Заключение: Стоимость жизни не увеличится.

1. Если завтра будет холодно (A), я надену теплое пальто (B), если рукав будет починен (C). Завтра будет холодно, а рукав не будет починен.

Заключение:  Я не надену теплое пальто.

1. Посылки: Если имеет место денежная эмиссия (A), то растет курс доллара (B). Если эмиссии нет и инфляция не растет (C), то курс доллара не растет. Инфляция не растет.

Заключение: Нет эмиссии и курс доллара не растет.

1. Или Сэлли и Боб одного возраста (A), или Сэлли старше Боба (B). Если Сэлли и Боб одного возраста, то Нэнси и Боб не одного возраста (C). Если Сэлли старше Боба, то Боб старше Уолтера (D).

Заключение: Или Нэнси и Боб не одного возраста, или Боб старше Уолтера.

1. Посылки: Если имеет место денежная эмиссия (A), то растет курс доллара (B). Если эмиссии нет и инфляция не растет (C), то курс доллара не растет. Инфляция не растет.

Заключение: Имеет место эмиссия и растет курс доллара или нет эмиссии и курс доллара не растет.

1. Посылки: Если 2 - простое число (A), то это наименьшее простое число (B). Если 2 - наименьшее простое число, то 1 не есть простое число (C). Число 1 не есть простое число.

Заключение: 2 - простое число.

1. Посылки: Все утки в этой деревне, имеющие метку «Б» принадлежат миссис Бонди. Утки в этой деревне не носят кружевных воротничков, если не принадлежат миссис Бонди. У миссис Бонди в этой деревне нет серых уток (А-утки, принадлежащие миссис Бонди; В-имеющие метку «Б», С-серые; D-носящие кружевные воротнички).

Заключение: Ни одна серая утка в этой деревне не носит кружевных воротничков.

1. Посылки: Ораторы, рассчитывающие на внешний эффект, слишком много думают о себе. Находиться в обществе людей, которые слишком много думают о себе, неприятно. Находиться в обществе хорошо информированных людей приятно. (А-люди, в обществе которых приятно находиться, В-хорошо информированные; С-ораторы, бьющие на внешний эффект; D-слишком много о себе думающие).

Заключение: Ораторы, рассчитывающие на внешний эффект, не очень хорошо информированы.

1. Джон или переутомился (A) или он болен (B). Если он переутомился, то он раздражается (C). Он не раздражается.

Заключение: Джон болен.

Следующие три задачи имеют одинаковую посылку: Известно, что хроничные сепульки (A) всегда латентны (B) или бифуркальны (C).Какие из следующих утверждений в этом случая истинны (чтобы составить правильно формулу утверждения, разберитесь в понятиях необходимое и достаточное условия теоремы, см. пп. 1.1 и1.8):

1. Посылки: Известно, что хроничные сепульки (A) всегда латентны (B) или бифуркальны (C)

Заключение: достаточным условием латентности хроничных сепулек является отсутствие у них бифуркальности.

1. Посылки: Известно, что хроничные сепульки (A) всегда латентны (B) или бифуркальны (C).

Заключение: латентность сепулек не является необходимым условием их хроничности или бифуркальности;

1. Посылки: Известно, что хроничные сепульки (A) всегда латентны (B) или бифуркальны (C).

Заключение: для нехроничности сепулек необходимо отсутствие у них как бифуркальности, так и латентности.